AULA 14 - Mínimos Quadrados Generalizados

Econometria I

Área quantitativa - IE/UFRJ

Mínimos Quadrados Generalizados

- Na aula anterior vimos que uma das hipóteses do modelo MQO é

H2 $E(\mathbf{uu}') = \sigma^2 \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade $(n \times n)$
Por causa da hipótese de homocedasticidade e não correlação entre os erros temos

- Se esta hipótese clássica é violada, o método por MQO torna-se ineficiente estatisticamente.
- Seja o modelo na forma matricial

$$Y = X\beta + u$$

- Assumimos que:

$$E\left[u|X\right] = 0$$
$$E\left[uu'|X\right] = \sigma^2 \Omega$$

em que Ω é uma matriz positiva definida conhecida $(n \times n)$.

- MQO é um caso especial em que $\Omega = I$.

Mínimos Quadrados Generalizados

- No caso da heterocedasticidade teremos:

$$\sigma^2\Omega = \sigma^2 \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

- Se temos autocorrelação, mas não heterocedasticidade:

$$\sigma^2\Omega = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Mínimos Quadrados Generalizados

- Suponha que $\hat{\beta}$ é estimativa de β.
- O método generalizado estima β minimizando ao quadrado do vetor dos resíduos.
- O estimador tem um fórmula explícita:

$$\hat{\beta} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$$

- Sendo o valor esperado:

$$E[\hat{\beta}] = \left(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}E[\mathbf{y}] = \left(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\beta = \beta$$

- Sendo a variância:

$$\begin{aligned}
varcov[\hat{\beta}|\mathbf{X}] =& E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'|\mathbf{X}] \\
=& E[\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'uu'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}] \\
=& E[\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'(\sigma^2\Omega)'\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}] \\
=& \sigma^2(X'\mathbf{\Omega}X)^{-1}
\end{aligned}$$

Mínimos Quadrados Generalizados Estimado

- O problema é que na prática não sabemos quem é o σ^2, assim como as verdadeiras variâncias e covariâncias (isto é, a estrutura da matriz Ω).
- Como solução, podemos usar o método mínimos quadrados generalizados estimado (ou viável).
- Aqui nós primeiro estimamos nosso modelo por MQO desconsiderando o problemas de heterocedasticidade e/ou autocorrelação.
- Obtemos os resíduos deste modelo e a matriz (estimada) de variância-covariância do termo de erro, substituindo na expressão anterior

Mínimos Quadrados Generalizados Estimado

- Agora o estimador tem um fórmula explícita:

$$\hat{\beta} = \left(\mathbf{X}'\hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}\mathbf{y}$$

- Sendo a variância:

$$varcov(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'\hat{\mathbf{\Omega}}X)^{-1}$$